数理解析研究所講究録
584巻 1986年 37-42

T_j空間 ($j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$) について

静岡大 教育　勝田雄吉 (Yûkiti Katuta)

1. 序

Pを位相的性質としたとき，この性質をもつ位相空間をP空間，その位相(開集合の全体)をP位相とよぶ．任意の位相空間Xに対し，P空間$\rho(X)$と連続写像$\rho_X : X \to \rho(X)$が対応し，任意のP空間Yと任意の連続写像$f : X \to Y$に対し，連続写像$\hat{f} : \rho(X) \to Y$で$\hat{f} \circ \rho_X = f$をみたすものが一意的に存在するとき，ρをP関手とよぶことにする[1)]．P関手が常に存在するとは限らないが，もし存在すれば，同相を除いて一意的に定まる．$T_{3\frac{1}{2}}$関手の存在は知られている．また，$T_{3\frac{1}{2}}$関手とStone-Čechコンパクト化の合成はコンパクトT_2関手である．

こゝでの主な目的はT_j関手($j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$)を構成することである．その骨子は，まず[1]の中で導入されているS_j空間($j=1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$)を用いてS_j関手を構成する．ついで

T_0関手を作り，このS_j関手とT_0関手の合成として，残りのT_j関手が得られる．[1]にならって，以後$T_{3\frac{1}{2}}$，$S_{3\frac{1}{2}}$の代りにT_π，S_πを用いる．

2．S_j関手（$j=1, 2, 3, \pi$）．

つぎの公理（S_1），（S_2）をみたす位相空間XをそれぞれS_1空間，S_2空間という．

（S_1）　$x, y \in X$ で $x \notin \overline{y}$ ならば $y \notin \overline{x}$．

（S_2）　$x, y \in X$ で $x \notin \overline{y}$ ならば xの近傍U，yの近傍Vで$U \cap V = \phi$であるものが存在する．

S_3，S_πはそれぞれ通常の regular，completely regular のことである．以下，jは$1, 2, 3, \pi$のうちのいずれかを表すものとする．T_jの場合と同じく，$S_\pi \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_1$．また，$T_j \Leftrightarrow S_j + T_0$．

定理1．$\Omega = \{\mathcal{U}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$は集合$X$の上の幾つかの位相の集りとする．すべての$\mathcal{U}_\lambda$が$S_j$位相ならば，その上限の位相$\sup \Omega$ [2] もS_j位相である．

さて，Xを位相空間とし，その位相を$\mathcal{U}$とする．Xとその基礎集合を区別するために，しばらくの間，これをX^*で示す．すなわち，$X = (X^*, \mathcal{U})$．

$\Omega_j = \{\mathcal{V} \mid \mathcal{V}$ は X^* の上の S_j 位相で，$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}\}$ [3]，$\mathcal{U}_j = \sup \Omega_j$

とおく．明かに $\mathcal{U}\supset\mathcal{U}_1\supset\mathcal{U}_2\supset\mathcal{U}_3\supset\mathcal{U}_\pi$．定理1により，$\mathcal{U}_j$ は S_j 位相である．特に $\mathcal{U}_\pi$ は X の（すなわち $\mathcal{U}$ に関する）すべてのコゼロ集合によって生成される位相である．また，$\mathcal{U}$ 自身が S_j 位相ならば $\mathcal{U}=\mathcal{U}_j$．このように $\mathcal{U}_j$ を定め，位相空間 $(X^*, \mathcal{U}_j)$ を $\sigma_j(X)$ で示そう．σ_{jX} を X^* の恒等写像とすれば，$\mathcal{U}\supset\mathcal{U}_j$ だから，$\sigma_{jX}: X\to\sigma_j(X)$ は連続である．

定理2．σ_j は S_j 関手である．

3．T_j 関手（$j=0,1,2,3,\pi$）．

まず T_0 関手を作る．位相空間 X において，その上の同値関係 $\sim$ を $x\sim y \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$ で与える．$\sim$ による商空間 $X/\sim$ を $\tau_0(X)$ で表し，$\tau_{0X}: X\to\tau_0(X)$ を商写像とする．この τ_0 は [5] の意味の T_0-identification に他ならない．

定理3．τ_0 は T_0 関手である．

つぎに，先に与えた S_j 関手 σ_j とこの T_0 関手 τ_0 の合成を τ_j とする．すなわち，任意の位相空間 X に対し，$\tau_j(X)=\tau_0(\sigma_j(X))$，$\tau_{jX}=\tau_{0\sigma_j(X)}\circ\sigma_{jX}$ と定める．

定理4．τ_j は T_j 関手である．

なお，τ_0 に関しては，つぎの (1), (2), (3), が成り立つ．

(1) $i: A\to X$ が埋め込み（imbedding）ならば $\tau_0(i):\tau_0(A)$

$\to \tau_0(X)$ も埋め込みである.

(2) $f: X \to Y$ が商写像ならば $\tau_0(f): \tau_0(X) \to \tau_0(Y)$ も商写像である.

(3) 位相空間の族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し, $\tau_0(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \tau_0(X_\lambda)$[4].

問題1. τ_0 を τ_j または σ_j でおきかえたとき, 上の (1), (2), (3) は (どのような条件の下で) 成り立つか[5].

T_0 関手は別の方法でも作ることができる. 2つの元 0, 1 から成る集合に $\phi, \{0\}, \{0,1\}$ を開集合とするような位相を入れた空間を E で表す. 明かに E は T_0 空間である. 位相空間 X から E へのすべての連続写像の集合を $C(X)$ で表す. $C(X)$ 個の E の積空間 $\prod_{f\in C(X)} E_f$ $(E_f = E)$ の部分空間 $\{(f(x))_{f\in C(X)} \mid x \in X\}$ を $\rho(X)$, $\rho_X: X \to \rho(X)$ を $\rho(x) = (f(x))_{f\in C(X)}$, $x \in X$, で与えれば, この ρ は T_0 関手になる. E を $I = [0,1]$ でおきかえれば T_π 関手が得られる ([3] 参照).

問題2. 他の T_j 関手や S_j 関手についてもこのような方法で構成することができるか. すなわち, E や I に相当する空間が存在するか.

注

1) 関手は functor の和訳である（岩波数学辞典第２版）．実際，任意の連続写像 $f: X \to Y$ に対し，連続写像 $\rho(f) = (\sigma_Y \circ f)^{\wedge}: \rho(X) \to \rho(Y)$ が $\rho(f) \circ \rho_X = \rho_Y \circ f$ をみたすように一意的に存在する．したがって，この ρ は位相空間のカテゴリーから P 空間の full 部分カテゴリーへの（coreflector とよばれる）関手になっている．P が $T_{3\frac{1}{2}}$（すなわち Tychonoff）の場合に，[3] では，これを Tychonoff functor とよんでいる．これにならって，かく命名した．

2) $\sup \Omega$ は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ によって生成される X の上の位相．

3) Ω_j は空ではない．実際，X^* の上の最小の位相，すなわち ϕ と X^* のみを開集合とする位相はどの Ω_j にも属す．

4) $\tau_{0X_\lambda}: X_\lambda \to \tau_0(X_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ の積を $\varphi: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ で表す．各 $\tau_0(X_\lambda)$ が T_0 空間だからその積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ もも T_0 空間である．したがって，$\hat{\varphi}: \tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ が得られるが，この $\hat{\varphi}$ が同相写像のとき，$\tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ とかく。

5) τ_π に関しては，２つの位相空間 X, Y の積空間の場合でも，無条件では $\tau_\pi(X \times Y) = \tau_\pi(X) \times \tau_\pi(Y)$ は成りたたない（[2]，[4] 参照）．

文献

[1] Á Császár, General topology, Adam Hilger, Bristol 1978.

[2] T. Ishii, On the Tychonoff functor and w-compactness, Topology and its Applications 11 (1980) 173-187.

[3] K. Morita, Čech cohomology and covering dimesion for topological spaces, Fund. Math. 87 (1975) 31-52.

[4] S. Oka, Tychonoff functor and product spaces, Proc. Japan Acad. 54 (1978) 97-100.

[5] S. Willard, Genral topology, Addison-Wesly, Reading 1970.